

# MODEL MATEMATIKA SIS-SI DALAM PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA DENGAN VAKSINASI TAKSEMPURNA

N. FAJRI<sup>1</sup>, P. SIANTURI<sup>2</sup>, T. BAKHTIAR<sup>3</sup>

## Abstrak

Dalam penelitian ini, dibahas sebuah model penyebaran penyakit malaria tipe SIS-SI. Model ini membahas tentang penyebaran penyakit malaria dengan memperhatikan vaksin taksempurna ( $e$ ). Vaksin dikatakan berhasil jika  $e = 1$ , dan dikatakan tidak berhasil jika  $e = 0$ . Model SIS-SI mempunyai dua titik tetap yaitu, titik tetap tanpa penyakit dan titik tetap endemik. Dengan menggunakan bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ), maka diperoleh bahwa titik tetap tanpa penyakit bersifat stabil global, jika  $R_0 < 1$  dan titik tetap endemik bersifat stabil global, jika  $R_0 > 1$ . Selain itu, digunakan juga analisis bifurkasi yang bertujuan untuk mengetahui eksistensi dan jumlah titik tetap endemik pada model untuk setiap parameter yang diberikan. Jika pada model terjadi bifurkasi maju, maka titik tetap endemik bersifat stabil, dan jika terjadi bifurkasi mundur maka titik tetap endemik bersifat takstabil. Selanjutnya, jika efektivitas vaksin ditingkatkan, maka manusia terinfeksi akan menurun.

**Kata Kunci:** penyakit malaria, model SIS-SI, bifurkasi, vaksinasi.

## 1. PENDAHULUAN

Malaria merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh parasit yang dikenal dengan *Plasmodium*. Perantara atau pembawa parasit *Plasmodium* ini adalah nyamuk *Anopheles* betina yang menyebabkan rusaknya sel-sel darah merah pada manusia dan hewan melalui gigitannya. Malaria dapat ditularkan melalui transfusi darah, pemakaian jarum suntik, maupun bawaan. Pada tahun 2012, WHO menyatakan bahwa sekitar 3.4 miliar penduduk di dunia berisiko terkena malaria dengan 80% di antaranya merupakan penduduk benua Afrika dan Asia [14]. Untuk itu perlu dilakukan *treatment* pencegahan malaria untuk mengendalikan tingkat infeksi maupun penyebaran penyakit malaria.

Metode yang paling sering digunakan untuk mencegah penyakit malaria adalah obat-obatan, penyemprotan nyamuk, dan pencegahan gigitan. Sampai saat ini, belum ada vaksin malaria yang benar-benar ampuh untuk penyakit malaria. Pada tanggal 18 Oktober 2011 ditemukan vaksin malaria pertama buatan *GlaxoSmithKline*. Berdasarkan percobaan paling akhir vaksin tersebut mampu memberi kekebalan hingga empat tahun pada anak-anak [10] dan mampu

---

<sup>1</sup> Mahasiswa S2 Program Studi Matematika Terapan, Sekolah Pascasarjana IPB, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680. Email: [nurfajri.ifar@yahoo.com](mailto:nurfajri.ifar@yahoo.com)

<sup>2</sup> Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Matematika dan Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680. E-mail: [psianturi15@gmail.com](mailto:psianturi15@gmail.com)

<sup>3</sup> Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Matematika dan Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680. E-mail: [tonibakhtiar@yahoo.com](mailto:tonibakhtiar@yahoo.com)

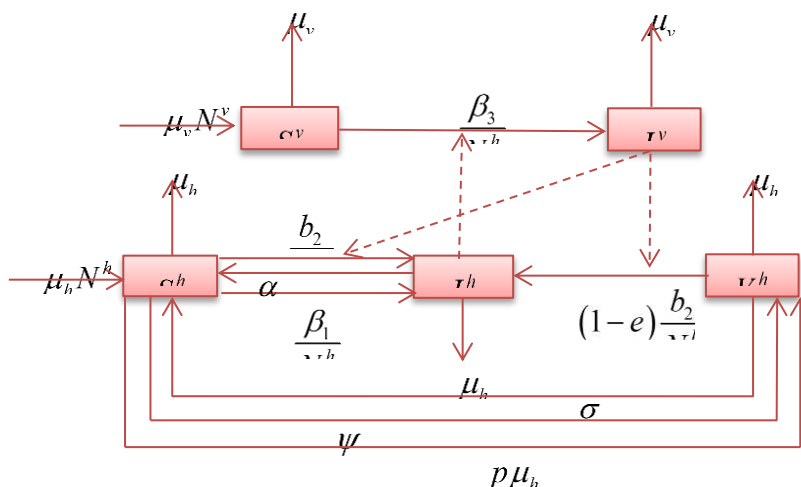
memberikan efektivitas kekebalan hingga 67% terhadap laki-laki di Kenya oleh Universitas Oxford Inggris [3].

Penelitian ini bertujuan untuk memodifikasi model SIR-SI dari Abdullahi [1] menjadi model SIS-SI dengan melihat efek dari vaksinasi taksempurna. Model epidemi dengan vaksinasi taksempurna mengacu pada model Safan [10]. Selanjutnya menganalisis kestabilan dari setiap titik tetap, baik kestabilan lokal maupun global dan menganalisis bifurkasi untuk mengetahui perubahan kualitatif sistem akibat perubahan parameter tertentu.

## 2. MODEL MATEMATIKA

Misalkan, populasi manusia  $N^h$  dibagi menjadi tiga kelas yaitu manusia yang rentan (*susceptible*)  $S^h$ , manusia terinfeksi (*infected*)  $I^h$  dan manusia tervaksinasi (*vaccination*)  $V^h$  sedangkan populasi nyamuk  $N^v$  dibagi menjadi dua kelas, yaitu nyamuk rentan (*susceptible*)  $S^v$  dan nyamuk terinfeksi (*infected*)  $I^v$ .

Manusia yang lahir memiliki laju konstan sebesar  $\mu_h$ . Proporsi manusia rentan yang baru lahir langsung diberi vaksin sebesar  $p$ . Manusia yang berada di kelas rentan dapat berpindah ke kelas terinfeksi akibat transfusi darah dengan laju  $\beta_1/N^h$  atau akibat gigitan nyamuk terinfeksi dengan laju  $b_2/N^h$ . Individu di kelas rentan dapat berpindah ke kelas vaksinasi dengan laju  $\psi$ . Manusia di kelas rentan mati dengan laju kematian sebesar  $\mu_h$ . Lahirnya bayi terinfeksi akibat bawaan pada kelas terinfeksi memiliki laju sebesar  $\eta$ . Manusia di kelas terinfeksi dapat berpindah ke kelas rentan karena penggunaan obat-obatan anti-malaria dengan laju sebesar  $\alpha$ . Manusia di kelas terinfeksi dapat mati dengan laju kematian sebesar  $\mu_h$ . Manusia di kelas vaksinasi dapat berpindah ke kelas terinfeksi dengan laju  $(1-e)b_2/N^h$  di mana  $e$  adalah efektivitas vaksin. Manusia di kelas tervaksinasi dapat mati dengan laju kematian sebesar  $\mu_h$ .



Gambar 1 Skema penyebaran malaria dan efektivitas vaksinasi tak sempurna

Ket: ( $\rightarrow$ ) menyatakan perpindahan individu

( $\cdots \rightarrow$ ) menyatakan pengaruh antar kompartemen.

Selanjutnya, nyamuk yang lahir memiliki laju konstan sebesar  $\mu_v$ . Nyamuk di kelas rentan dapat berpindah ke kelas terinfeksi karena menggigit manusia terinfeksi dengan laju  $\beta_3/N^h$  atau dapat mati dengan laju kematian sebesar  $\mu_v$ . Selanjutnya, nyamuk di kelas terinfeksi juga dapat mati dengan laju kematian  $\mu_v$ . Pola penyebaran penyakit malaria secara skematis dapat digambarkan pada Gambar 2.1.

Skema pada Gambar 2.1 dapat dituliskan dalam sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dS^h}{dt} = (1-p)\mu_h N^h + \alpha I^h + \sigma V^h - \left( \mu_h + \psi + \frac{\beta_1}{N^h} I^h + \frac{b_2}{N^h} I^v \right) S^h, \quad (1)$$

$$\frac{dI^h}{dt} = \left( \frac{\beta_1}{N^h} I^h + \frac{b_2}{N^h} I^v \right) S^h - (\mu_h + \alpha) I^h + (1-e) \frac{b_2}{N^h} V^h I^v,$$

$$\frac{dV^h}{dt} = p\mu_h N^h + \psi S^h - (\mu_h + \sigma) V^h - (1-e) \frac{b_2}{N^h} V^h I^v,$$

$$N^h = S^h + I^h + V^h,$$

$$\frac{dS^v}{dt} = \mu_v N^v - \left( \frac{\beta_3}{N^h} I^h + \mu_v \right) S^v,$$

$$\frac{dI^v}{dt} = \frac{\beta_3}{N^h} I^h S^v - \mu_v I^v,$$

$$N^v = S^v + I^v.$$

dengan memisalkan

$$S_h = \frac{S^h}{N^h}, I_h = \frac{I^h}{N^h}, V_h = \frac{V^h}{N^h}, S_v = \frac{S^v}{N^v}, I_v = \frac{I^v}{N^v}$$

maka sistem persamaan (1) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dI_h}{dt} &= (\beta_1 I_h + \beta_2 I_v)(1 - I_h - V_h) - (\mu_h + \alpha) I_h + (1-e) \beta_2 V_h I_v, \\ \frac{dV_h}{dt} &= p\mu_h + \psi(1 - I_h - V_h) - (\mu_h + \sigma) V_h - (1-e) \beta_2 V_h I_v, \\ \frac{dI_v}{dt} &= \beta_3(1 - I_v) I_h - \mu_v I_v. \end{aligned} \quad (2)$$

dengan  $\beta_2 = b_2 n$ , dan  $n = N^v/N^h$ .

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

#### 3.1 Penentuan Titik Tetap

Titik tetap pada sistem dinamik (2) diperoleh berdasarkan:

$$\frac{dI_h}{dt} = \frac{dV_h}{dt} = \frac{dI_v}{dt} = 0.$$

Dari SPD (2) diperoleh dua titik tetap yaitu titik tetap tanpa penyakit  $x_{dfe}$  dan titik tetap endemik  $x_{ee}$ .

1. Titik tetap tanpa penyakit  $x_{dfe}(I_h, V_h, I_v) = (0, V_h^*, 0)$ .

di mana  $V_h^* = \frac{p\mu_h + \psi}{\psi + \mu_h + \sigma}$ .

2. Titik tetap endemik  $x_{ee}(I_h, V_h, I_v) = (I_h^{**}, V_h^{**}, I_v^{**})$ .

di mana  $V_h^{**} = \frac{p\mu_h + \psi - 2\psi I_h^{**}}{2\psi + \mu_h + \alpha + (1-e)\beta_2 I_v^{**}}$  dan  $I_v^{**} = \frac{\beta_3 I_h^{**}}{\beta_3 I_h^{**} - \mu_v}$ ,

sedangkan untuk  $0 < I_h^{**} \leq 1$  akan diperoleh melalui persamaan bifurkasi.

### 3.2 Analisis Kestabilan Lokal Titik Tetap Tanpa Penyakit $x_{dfe}$

Untuk mengetahui kestabilan lokal dari titik tetap tanpa penyakit  $x_{dfe}$ , dapat dilakukan dengan mengevaluasi matriks Jacobian

$$J_{x_{dfe}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial I_h} & \frac{\partial f}{\partial V_h} & \frac{\partial f}{\partial I_v} \\ \frac{\partial g}{\partial I_h} & \frac{\partial g}{\partial V_h} & \frac{\partial g}{\partial I_v} \\ \frac{\partial h}{\partial I_h} & \frac{\partial h}{\partial V_h} & \frac{\partial h}{\partial I_v} \end{pmatrix} \bigg|_{x_{dfe}} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$$

di mana

$$a_1 = \beta_1(1 - V_h^*) - \mu_h - \alpha; a_2 = 0; a_3 = \beta_2(1 - V_h^*) + (1 - e)\beta_2 V_h^*; a_4 = -\psi;$$

$$a_5 = -(\psi + \mu_h + \sigma), a_6 = -(1 - e)\beta_2 V_h^*; a_7 = \beta_3, a_8 = 0; a_9 = -\mu_v.$$

Nilai eigen matriks Jacobi dapat ditentukan dengan menyelesaikan  $\det(J_{x_{dfe}} - \lambda I) = 0$  atau dapat ditulis sebagai

$$\phi(\lambda) = (a_5 - \lambda)((a_1 - \lambda)(a_9 - \lambda) - a_3 a_7) = 0.$$

Dengan demikian diperoleh nilai eigen  $\lambda_1, \lambda_2$  dan  $\lambda_3$ . Untuk  $\lambda_1 = a_5$  selalu bernilai negatif, sedangkan

- $\lambda_2$  bernilai negatif jika dan hanya jika  $a_1 + a_9 < 0$  dan  $a_1 a_9 < a_3 a_7$ ; dan
- $\lambda_3$  bernilai negatif jika dan hanya jika  $a_1 + a_9 < 0$

Titik tetap  $x_{dfe}$  bersifat stabil lokal jika dan hanya jika  $\lambda_1, \lambda_2$  dan  $\lambda_3$  bernilai negatif [11].

### 3.3 Eksistensi Kestabilan Global

Selain kestabilan lokal dari titik tetap, pada penelitian ini juga melihat kestabilan global dari titik tetap. Kestabilan global adalah kestabilan dalam waktu jangka panjang. Untuk mengetahui eksistensi kestabilan global dari sistem persamaan diferensial (2) pada daerah  $\Sigma$ , di mana  $\Sigma = \{(I_h, V_h, I_v) : I_h \geq 0, V_h \geq 0, I_h + V_h \leq 1, 0 \leq I_v \leq 1\}$  dan  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ , maka dengan menggunakan Kriteria Bendixson [5], diperoleh

$$(i) \quad \sup \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial I_h} + \frac{\partial f_3}{\partial I_v} + \left| \frac{\partial f_1}{\partial V_h} \right| + \left| \frac{\partial f_3}{\partial V_h} \right| \right\} \leq \beta_1 - (\mu_h + \mu_v + \alpha)$$

$$(ii) \quad \sup \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial V_h} + \frac{\partial f_3}{\partial I_v} + \left| \frac{\partial f_2}{\partial I_h} \right| + \left| \frac{\partial f_3}{\partial I_h} \right| \right\} = \beta_3 - (\mu_h + \mu_v + \sigma).$$

Dengan demikian, berdasarkan Kriteria Bendixson, sistem persamaan diferensial (2) tidak memiliki solusi periodik pada daerah  $\Sigma$ , sehingga selalu memiliki titik tetap yang bersifat stabil global, jika memenuhi  $\beta_1 < \mu_h + \mu_v + \alpha$  atau  $\beta_3 < \mu_h + \mu_v + \sigma$ .

### 3.4 Penentuan Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar yang dinotasikan dengan  $R_0$  merupakan nilai harapan terjadinya infeksi yang dihasilkan oleh satu individu terinfeksi, di mana jika  $R_0 < 1$ , maka jumlah manusia terinfeksi akan menurun pada infeksi berikutnya sehingga penyakit tidak akan menyebar, sedangkan jika  $R_0 > 1$ , maka jumlah manusia terinfeksi akan meningkat sehingga penyakit akan menyebar.

Untuk menentukan bilangan reproduksi dasar dilakukan dengan pendekatan Matriks *Next Generation K*. Matriks *Next Generation K* untuk model penyebaran penyakit dapat didefinisikan sebagai

$$K = FV^{-1}$$

Untuk SPD (2) diperoleh matriks  $F$  dan  $V$  sebagai berikut

$$F = \begin{pmatrix} \beta_1(1-V_h^*) & \beta_2(1-eV_h^*) \\ \beta_3 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } V = \begin{pmatrix} \mu_h + \alpha & 0 \\ 0 & \mu_v \end{pmatrix}.$$

Dengan demikian, diperoleh matriks  $K$  sebagai

$$K = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1(1-V_h^*)}{\mu_h + \alpha} & \frac{\beta_2(1-eV_h^*)}{\mu_v} \\ \frac{\beta_3}{\mu_h + \alpha} & 0 \end{pmatrix}.$$

Bilangan reproduksi dasar merupakan nilai eigen dengan modulus terbesar matriks  $K$  [13], sehingga diperoleh

$$R_0 = \frac{k_1}{2} + \sqrt{\frac{k_1^2}{4} + k_2 k_3} \quad (4)$$

di mana

$$k_1 = \frac{\beta_1(1-V_h^*)}{\mu_h + \alpha}, \quad k_2 = \frac{\beta_2(1-eV_h^*)}{\mu_v} \text{ dan } k_3 = \frac{\beta_3}{\mu_h + \alpha}.$$

Berdasarkan teorema Bendixson, sistem persamaan diferensial (2) selalu memiliki titik tetap yang bersifat stabil global, jika memenuhi  $\beta_1 < \mu_h + \mu_v + \alpha$  atau  $\beta_3 < \mu_h + \mu_v + \sigma$ . Dengan demikian, jika kondisi  $\beta_1 < \mu_h + \mu_v + \alpha$  atau

$\beta_3 < \mu_h + \mu_v + \sigma$  terpenuhi maka dapat disimpulkan bahwa jika  $R_0 < 1$ , maka sistem persamaan diferensial (2) akan bersifat stabil global ke titik tetap bebas penyakit  $x_{dfe}$ . Jika  $R_0 > 1$ , maka sistem persamaan diferensial (2) akan bersifat stabil global ke titik tetap endemik  $x_{ee}$ .

### 3.5 Persamaan Bifurkasi Dan Arah Kurva Bifurkasi

Bifurkasi adalah perubahan kestabilan titik tetap akibat perubahan parameter. Pada bagian ini hanya akan dilakukan analisis bifurkasi terhadap parameter  $\beta_1$ . Persamaan bifurkasi dapat ditentukan dengan membuat  $\frac{dI_v}{dt} = 0$

sehingga diperoleh  $I_v = \frac{\beta_3 I_h}{\beta_3 I_h + \mu_v}$  dan  $\frac{dV_h}{dt} = 0$  sehingga diperoleh

$$V_h = \frac{p\mu_h + \psi - \psi I_h}{\psi + \mu_h + \sigma + (1-e)\beta_2 I_v}.$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan  $I_v$  dan  $V_h$  ke persamaan  $\frac{dI_h}{dt} = 0$  maka diperoleh persamaan bifurkasi untuk parameter  $\beta_1$  sebagai

$$0 = F(\beta_1, I_h^{**}) = a(I_h^{**})^3 + b(I_h^{**})^2 + cI_h^{**} + d \quad (5)$$

dengan

$$a = \beta_1 \beta_3^2 (\mu_h + \sigma + (1-e)\beta_2) > 0$$

$$b = -\alpha e \beta_2 \beta_3^2 - e \psi \beta_2 \beta_3^2 + e \beta_1 \beta_2 \beta_3^2 - e \mu_v \beta_1 \beta_2 \beta_3 - e \beta_2^2 \beta_3^2 - e \mu_h \beta_2^2 \beta_3^2 + p \mu_h \beta_1 \beta_3^2 + \alpha \psi \beta_3^2 + \alpha \sigma \beta_3^2 + \alpha \beta_2 \beta_3^2 + \alpha \beta_3^2 \mu_h + \psi \beta_2 \beta_3^2 + \psi \mu_h \beta_3^2 - \sigma \beta_1 \beta_3^2 + 2 \sigma \mu_v \beta_1 \beta_3 + \sigma \beta_2 \beta_3^2 + \sigma \mu_h \beta_3^2 - \beta_1 \beta_2 \beta_3^2 + \mu_v \beta_1 \beta_2 \beta_3^2 - \mu_h \beta_1 \beta_3^2 + 2 \mu_h \mu_v \beta_1 \beta_3 + \beta_2^2 \beta_3^2 + 2 \mu_h \beta_2 \beta_3^2 + \mu_h^2 \beta_3^2$$

$$c = ep \mu_h \beta_2 \beta_3^2 - \alpha e \mu_v \beta_2 \beta_3 + e \psi \beta_2 \beta_3^2 - e \psi \mu_v \beta_2 \beta_3 + e \mu_v \beta_1 \beta_2 \beta_3 + e \beta_2^2 \beta_3^2 - e \mu_h \mu_v \beta_2 \beta_3 + 2 p \mu_h \mu_v \beta_1 \beta_3 + 2 \alpha \psi \mu_v \beta_3 + 2 \alpha \sigma \mu_v \beta_3 + \alpha \mu_v \beta_2 \beta_3 + 2 \alpha \mu_h \mu_v \beta_3 - \psi \beta_2 \beta_3^2 + \psi \mu_v \beta_2 \beta_3 + 2 \psi \mu_h \mu_v \beta_3 - 2 \sigma \mu_v \beta_1 \beta_3 + \sigma \mu_v^2 \beta_1 - \sigma \beta_2 \beta_3^2 + \sigma \mu_v \beta_2 \beta_3 + 2 \sigma \mu_h \mu_v \beta_3 - \mu_v \beta_1 \beta_2 \beta_3 - 2 \mu_h \mu_v \beta_1 \beta_3 + \mu_h \mu_v^2 \beta_1 - \beta_2^2 \beta_3^2 - \mu_h \beta_2 \beta_3^2 + 2 \mu_h \mu_v \beta_2 \beta_3 + 2 \mu_h^2 \mu_v \beta_3$$

$$d = ep \mu_h \mu_v \beta_2 \beta_3 + e \psi \mu_v \beta_2 \beta_3 + p \mu_h \mu_v^2 \beta_1 + \alpha \psi \mu_v^2 + \alpha \sigma \mu_v^2 + \alpha \mu_h \mu_v^2 - \psi \mu_v \beta_2 \beta_3 + \psi \mu_h \mu_v^2 - \sigma \mu_v^2 \beta_1 - \sigma \mu_v \beta_2 \beta_3 + \sigma \mu_h \mu_v^2 - \mu_h \mu_v^2 \beta_1 - \mu_h \mu_v \beta_2 \beta_3 + \mu_h^2 \mu_v^2.$$

Persamaan bifurkasi digunakan untuk menentukan  $I_h^{**}$  sehingga  $V_h^{**}$  dan  $I_v^{**}$  pada persamaan (5) dapat ditentukan. Dengan demikian, titik tetap endemik dapat diperoleh dari setiap parameter yang diberikan. Dalam hal ini, nilai parameter  $\beta_1$  dianggap sebagai peubah sedangkan nilai parameter lainnya dianggap konstan. Nilai  $\beta_1$

yang mengakibatkan eksistensi titik tetap endemik oleh Ruang dan Wei [9] diberikan oleh kasus-kasus di bawah ini.

1. Jika  $d < 0$ , maka SPD (2) paling sedikit memiliki satu titik tetap endemik positif;
2. Jika  $d \geq 0$ , maka SPD (2) memiliki titik tetap endemik positif jika dan hanya jika  $\bar{I}_h^{**} = \frac{1}{3a}(-b + \sqrt{b^2 - 3ac}) > 0$  dan  $F(\bar{I}_h^{**}) \leq 0$ ; selain itu
3. SPD (2) tidak terdapat titik tetap endemik positif.

Dengan demikian daerah  $\beta_1$  yang memberikan titik tetap endemik diberikan oleh

- Kasus 1: Untuk  $d < 0$ , ekuivalen dengan

$$0 > ep\mu_h\mu_v\beta_2\beta_3 + e\psi\mu_v\beta_2\beta_3 + p\mu_h\mu_v^2\beta_1 + \alpha\psi\mu_v^2 + \alpha\sigma\mu_v^2 + \alpha\mu_h\mu_v^2 - \eta\psi\mu_v^2 - \eta\sigma\mu_v^2 - \eta\mu_h\mu_v^2\psi - \psi\mu_v\beta_2\beta_3 + \psi\mu_h\mu_v^2 - \sigma\mu_v^2\beta_1 - \sigma\mu_v\beta_2\beta_3 + \sigma\mu_h\mu_v^2 - \mu_h\mu_v^2\beta_1 - \mu_h\mu_v\beta_2\beta_3 + \mu_h^2\mu_v^2$$

sehingga diperoleh nilai  $\beta_1$  yang memberikan titik tetap endemik pada interval

$$\beta_1 > \bar{\beta}_1 = \frac{q_1}{((1-p)\mu_h + \sigma)\mu_v}, \quad (6)$$

di mana

- $q_1 = -\beta_2\beta_3((1-ep)\mu_h + (1-e)\psi + \sigma) + ((\alpha + \mu_h)(\psi + \sigma + \mu_h))\mu_v$ ;
- Kasus 2:  $d \geq 0$ ,  $\bar{I}_h^{**} = \frac{1}{3a}(-b + \sqrt{b^2 - 3ac}) > 0$  dan  $F(\beta_1, \bar{I}_h^{**}) \leq 0$

Untuk  $d \geq 0$ , diperoleh

$$\beta_1 < \bar{\beta}_1 = \frac{q_1}{((1-p)\mu_h + \sigma)\mu_v}, \quad (7)$$

di mana

$$q_1 = -\beta_2\beta_3((1-ep)\mu_h + (1-e)\psi + \sigma) + ((\alpha + \mu_h)(\psi + \sigma + \mu_h))\mu_v;$$

Solusi untuk  $\bar{I}_h^{**} = \frac{1}{3a}(-b + \sqrt{b^2 - 3ac}) > 0$  dan  $F(\beta_1, \bar{I}_h^{**}) \leq 0$  hanya akan dilakukan perhitungan pada bagian simulasi.

Arah bifurkasi pada titik  $(\bar{\beta}_1, \bar{I}_h^{**})$  dapat diperoleh melalui

$$\frac{dI_h}{d\beta_1} = -\frac{F_{\beta_1}(\bar{\beta}_1, \bar{I}_h^{**})}{F_{I_h}(\bar{\beta}_1, \bar{I}_h^{**})}. \text{ Jika } \frac{dI_h}{d\beta_1} < 0, \text{ maka titik bifurkasi } (\bar{\beta}_1, \bar{I}_h^{**}) \text{ mengalami}$$

bifurkasi mundur atau memiliki kemiringan negatif dan jika  $\frac{dI_h}{d\beta_1} > 0$ , maka titik bifurkasi  $(\bar{\beta}_1, \bar{I}_h^{**})$  mengalami bifurkasi maju atau memiliki kemiringan positif.

#### 4. SIMULASI

Nilai-nilai parameter yang digunakan pada bagian simulasi ini adalah  $\mu_h = 0.041$ ,  $\mu_v = 0.13$ ,  $\beta_3 = 0.024$ ,  $\alpha = 1/3$ ,  $\beta_2 = 0.5$ , dan  $\sigma = 1/730$ ,  $p = 0.8$ ,  $\psi = 0.4$ ,  $\beta_1 = 0.022$ ,  $e \in [0.1]$ ,  $I_h(0) = 0.00025$ ,  $V_h(0) = 0.977$  dan  $I_v(0) = 0.00015$ .

##### Simulasi Bifurkasi

Dengan menggunakan parameter di atas, maka diperoleh persamaan bifurkasi sesuai pers. (5) sebagai

$$\begin{aligned} 0 &= F(\beta_1, I_h^{**}) \\ &= 0.000197\beta_1(I_h^{**})^3 + (0.00102\beta_1 + 0.000328)(I_h^{**})^2 + (-0.00028\beta_1 + 0.00166)I_h^{**} \\ &\quad + 0.002379 - 0.000162\beta_1 \end{aligned}$$

Parameter-parameter yang digunakan pada simulasi ini memenuhi  $\beta_3 < \mu_h + \mu_v + \sigma$ , sehingga berdasarkan kriteria Bendixson, sistem persamaan (2) selalu memiliki titik tetap yang bersifat stabil global.

Selang  $\beta_1$  yang memberikan titik tetap endemik pada sistem persamaan diferensial (2) berdasarkan kasus satu ialah

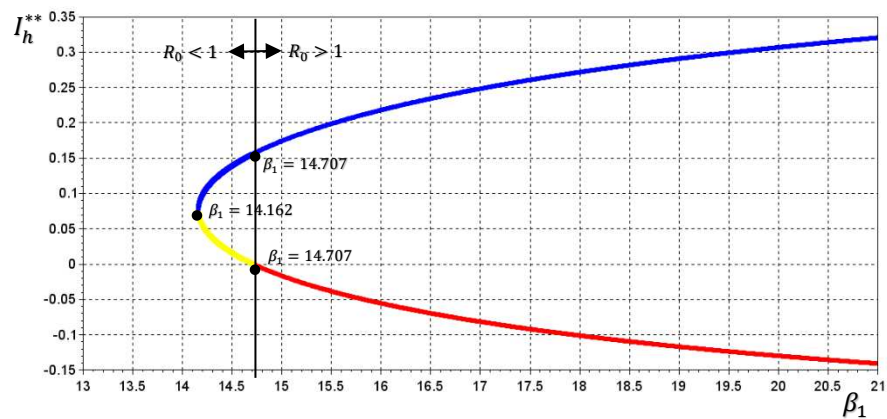
$$\beta_1 > 14.707, \quad (8)$$

sedangkan untuk kasus dua diperoleh

$$14.162 \leq \beta_1 \leq 14.707. \quad (9)$$

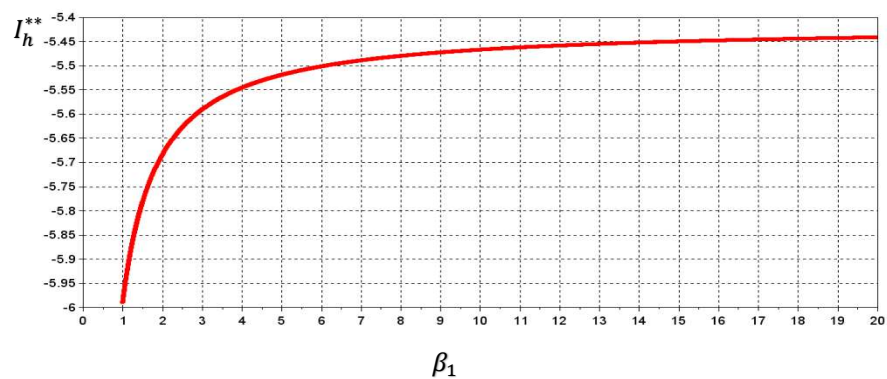
Dari kedua kasus tersebut, maka selang  $\beta_1$  yang memberikan titik tetap endemik untuk sistem persamaan diferensial (2) ialah pada  $\beta_1 \geq 14.162$ .





Gambar 2 Kurva bifurkasi untuk parameter  $\beta_1$  terhadap dua akar  $F(\beta_1, I_h^{**}) = 0$  yang terbesar

Simulasi kurva bifurkasi untuk parameter  $\beta_1$  terhadap dua akar  $F(\beta_1, I_h^{**}) = 0$  yang terbesar ditunjukkan pada Gambar 4.1. Pada Gambar 4.1, kurva yang berwarna biru memberikan solusi  $F(\beta_1, I_h^{**}) = 0$  yang mengalami bifurkasi maju. Dalam hal ini, kurva tersebut memberikan titik tetap endemik yang bersifat stabil. Sementara itu, kurva berwarna kuning memberikan solusi  $F(\beta_1, I_h^{**}) = 0$  yang mengalami bifurkasi mundur dan diperoleh bahwa kurva tersebut memberikan titik endemik yang bersifat takstabil. Kurva berwarna merah bukan merupakan titik tetap endemik karena memberikan nilai  $I_h^{**} < 0$ . Akar-akar persamaan (5) yang lain diberikan pada Gambar 4.2, di mana pada kurva tersebut tidak terdapat selang  $\beta_1$  yang memberikan titik tetap endemik yang ditandai dengan  $I_h^{**} < 0$ .



Gambar 3 Kurva bifurkasi untuk parameter  $\beta_1$  terhadap akar yang lain dari persamaan  $F(\beta_1, I_h^{**}) = 0$

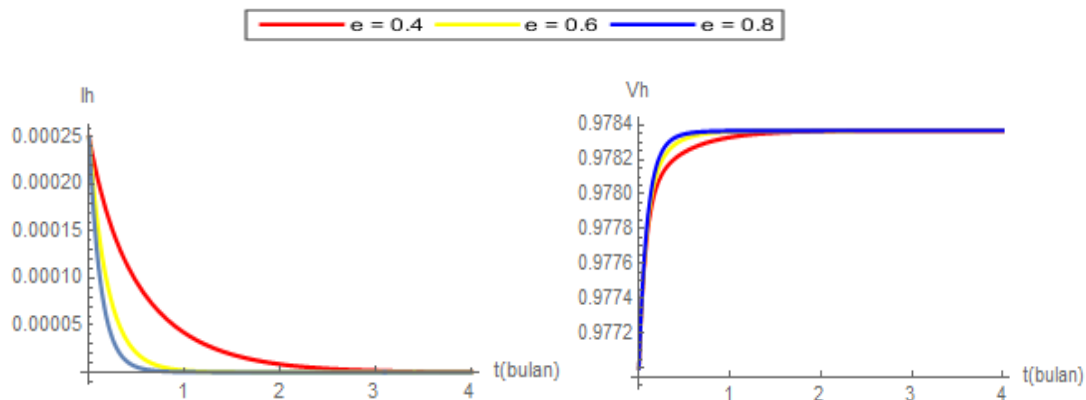
### Simulasi efektivitas vaksinasi

Pada bagian simulasi ini, hanya diamati dinamika populasi dalam kondisi ketika  $R_0 < 1$ . Simulasi ini dilakukan untuk menunjukkan pengaruh efektivitas vaksin taksempurna ( $e < 1$ ) terhadap proporsi manusia dan proporsi nyamuk. Dalam hal ini, akan ditunjukkan bahwa peningkatan dan penurunan nilai parameter  $e$  dapat mengubah bilangan reproduksi dasar  $R_0$  yang didefinisikan pada persamaan (6). Adapun nilai  $e$  yang digunakan pada simulasi ini diberikan pada Tabel 3.1.

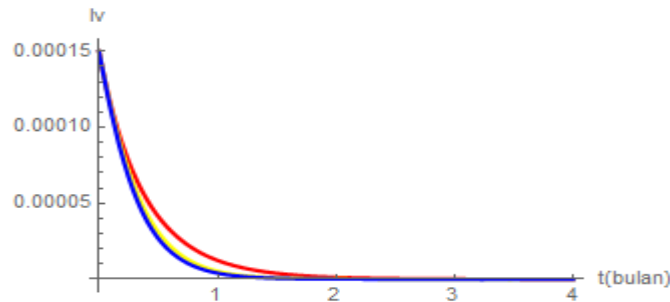
Tabel 1  
Hasil simulasi efektivitas vaksin pada manusia terhadap  
bilangan reproduksi dasar

Parameter $e$ (Safan <i>et al.</i> 2014)	Bilangan reproduksi dasar
$e = 0.40$	$R_0 = 0.390$
$e = 0.60$	$R_0 = 0.321$
$e = 0.80$	$R_0 = 0.233$

Pada populasi manusia sebagaimana ditunjukkan dalam Gambar 4.13, jika efektivitas vaksin pada manusia diperbesar, maka menyebabkan semakin berkurangnya proporsi manusia di kelas terinfeksi. Efektivitas vaksin yang diberikan kepada manusia, juga memberikan dampak pada proporsi nyamuk terinfeksi sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 4.14. Jika vaksin yang diberikan kepada manusia memiliki efektivitas yang besar, maka dapat menyebabkan proporsi nyamuk di kelas terinfeksi semakin menurun.



Gambar 4 Dinamika proporsi populasi manusia untuk beberapa efektivitas vaksinasi



Gambar 5 Dinamika proporsi nyamuk untuk beberapa tingkat efektivitas vaksin

## 5. SIMPULAN

Rincian hasil-hasil utama dalam artikel ini adalah sebagai berikut:

1. Sistem persamaan diferensial (2) memiliki dua jenis titik tetap, yaitu titik tetap tanpa penyakit dan titik tetap endemik. Jika  $R_0 < 1$ , maka sistem persamaan diferensial (2) memiliki titik tetap tanpa penyakit  $x_{dfe}$  yang bersifat stabil global. Jika  $R_0 > 1$ , maka sistem persamaan diferensial (2) memiliki titik tetap endemik  $x_{ee}$  yang bersifat stabil global dan titik tetap bebas penyakit bersifat takstabil.
2. Berdasarkan analisis bifurkasi terhadap parameter  $\beta_1$  pada sistem persamaan diferensial (2) dapat disimpulkan bahwa untuk setiap kurva bifurkasi berlaku
  - Jika terjadi bifurkasi mundur, maka titik tetap endemik bersifat takstabil.
  - Jika terjadi bifurkasi maju, maka titik tetap endemik bersifat stabil.
3. Simulasi juga menunjukkan efek dari vaksinasi taksempurna ( $e < 1$ ) terhadap perubahan nilai bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ). Jika efektivitas vaksin ditingkatkan, maka bilangan reproduksi dasar akan semakin kecil. Dengan demikian, peningkatan nilai parameter ini dapat membantu menekan laju penularan penyakit dalam populasi. Pada populasi manusia, semakin diperbesar efektivitas vaksin, maka jumlah manusia terinfeksi semakin sedikit. Demikian juga pada populasi nyamuk, semakin besar efektivitas vaksin, maka jumlah nyamuk terinfeksi semakin sedikit. Akibatnya, penyakit akan semakin cepat hilang dari populasi.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Abdullahi MB, Hasan YA, Abdullah FA. 2013. A Mathematical Model of Malaria and The Effectiveness of Drugs. *Applied Mathematical Sciences*. 7(62): 3079-3095.
- [2] Burton TA. 2005. *Volterra Integral and Difference Equations*. 2nd ed. New York: Elsevier.
- [3] Hill AVS, Ogbwang C, Kimani D, Edwards NJ, Roberts R, Mwacharo J, Bowyer G, Bliss C, Hodgson SH, Njuguna P, Viebig NK, Nicosia A, Gitau E, Douglas S, Illingworth J, Marsh K, Lawrie A, Imoukhuede EB, Ewer K, Urban BC, Bejon P, The MVVC group. 2015. Prime-boost vaccination with chimpanzee adenovirus and modified vaccinia

- Ankara encoding TRAP provides partial protection against *Plasmodium falciparum* infection in Kenyan adults. *Science Journal, Science Translational Medicine*. 7(286): 286re5. doi:10.1126/scitranslmed.aaa2373.
- [4] Labadin C, Kon ML, Juan SFS. 2009. Deterministic Malaria Transmission Model with Acquired Immunity. *Proceedings of the World Congress on*
  - [5] Li Y, Muldowney JS. 1993. On Bendixson's Criterion. *Journal of Differential Equations*. 106: 27-39
  - [6] Mandal S, Sarkar RR, Sinha S. 2011. Mathematical Models of Malaria - a Review. *Malaria Journal*. 10: 1-19.
  - [7] Perko L. 1991. *Differential Equation and Dynamical System*. New York: Springer-Varlag.
  - [8] Pongsumpun P. 2006. Transmission Model For Dengue Disease With And Without The Effect Of Extrinsic Incubation Period. *KMITL Science and Technology Journal*. 6(2): 74-78.
  - [9] Ruan S, Wei J. 2001. On The Zeros of a Third Degree Exponential Polynomial with Applications to a Delayed Model for the Control of Testosterone Secretion. *IMA Journal of Mathematics Applied in medicine and Biology*. 18: 41-52.
  - [10] Safan M, Rihan FA. 2014. Mathematical Analysis of an SIS Model with Imperfect Vaccination and Backward Bifurcation. *Mathematical and Computers in Simulation*. 96: 195-206.
  - [11] The RTS,S Clinical Trials Partnership. 2011. First Results of Phase 3 Trial of RTS,S/AS01 Malaria Vaccine in African Children. *The New England Journal of Medicine*. 365: 1863-1875. doi:10.1056/NEJMoa1102287.
  - [12] Tu PNV. 1994. *Dynamical Sistem*. New York: Springer-Verlag.
  - [13] Van den Driessche P, Watmough J. 2008. Chapter 6: Further Notes on the Basic Reproduction Number. *Mathematical Epidemiology, Lecture Notes Mathematics*. New York: Springer. 1945: 159-178.
  - [14] WHO. 2013. Malaria. [diunduh pada 05 Februari 2015]. Tersedia pada: <http://who.int/mediacentre/news/release/2013/world-malaria-report-20131211/en/>